Universidade de São Paulo em São Carlos 9.5.2011

Mecânica Quântica Aplicada Lista 3

Exercício 1: Demonstre que os harmônicos esféricos são funções com paridade bem definida, isto é, $Y_{lm}(\pi-\theta,\pi+\phi)=(-1)^l Y_{lm}(\theta,\phi)$.

Exercício 2: Obtenha as autofunções da partícula livre como caso limite do seu movimento num campo de força central com $V(r)\longrightarrow 0$. Compare as autofunções assim derivadas - associadas ao conjunto completo de observáveis H, L^2 e L_z - àquelas descritas por ondas planas - associadas ao movimento caracterizado pelos observáveis p_x, p_y, p_z e $\hat{H}=\mathbf{P}^2/2m$ -, que igualmente constituem um conjunto completo de observáveis (veja Constantinescu).

Exercício 3: Encontre os níveis de energia e as funções de onda de uma partícula confinada em uma caixa esférica descrita pela energia potencial, $V(r)=0$ para $r<a$ e $V(r)=\infty$ para $r\geq a$. Considere o caso $l=0$.

Exercício 4: Como outro exemplo de sistema solúvel associado a um potencial central, obtenha os níveis de energia e as funções de onda estacionárias de um oscilador harmônico isotrópico tridimensional.[1]

Exercício 5: Mostre $\hat{\mathbf{l}}\times\hat{\mathbf{l}}=i\hbar\hat{\mathbf{l}}$.

Exercício 6: Mostre $[l_k,r_m]=i\hbar r_n\varepsilon_{kmn}$ onde o Levi-Civita tensor é definido por $\varepsilon_{kmn}=1$ quando (kmn) é uma permutação par de (123), $\varepsilon_{kmn}=-1$ para uma permutação impar e $\varepsilon_{kmn}=0$ se dois dos índices são iguais.

Exercício 7: Mostre $[\mathbf{l}^2,\mathbf{l}]=0$.

Exercício 8: Mostre para um oscilador harmônico três-dimensional isotrópico $[\hat{H},\hat{\mathbf{l}}^2]=[\hat{H},\hat{l}_z]=0$. Faz cálculos explícitos, isto é, mostra

$$\left[\tfrac{p^2}{2m},\hat{l}_z\right]=0=\left[\frac{m}{2}\omega^2r^2,\hat{l}_z\right]\qquad\text{e}\qquad\left[\tfrac{p^2}{2m},\hat{\mathbf{l}}^2\right]=0=\left[\frac{m}{2}\omega^2r^2,\hat{\mathbf{l}}^2\right]\ .$$

Exercício 9: Mostra que se $\hat{\jmath}_z$ é preciso, $\hat{\jmath}_x$ e $\hat{\jmath}_y$ são imprecisos.

Exercício 10: Calcule os elementos da matriz de $\hat{\jmath}_x$ e $\hat{\jmath}_x^2$.

[1] Veja Cohen-Tannoudji, Chapter VII, Complement B_VII, p.811.

Exercício 11: Considere o problema da adição dos momentos angulares $j_1 = 1$ e $j_2 = 1/2$:
a. Quais os possíveis valores de m e j, em que $\hat{\mathbf{j}}^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle$ e $j_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle$?
b. Quais as degenerescências $g_{j_1,j_2}(m)$?
c. Encontre os estados da base $\{|j,m\rangle\}$, comum aos operadores $\mathbf{j}_1^2$, $\mathbf{j}_2^2$, J_{1z}, J_{2z}, expandidos na base $\{|j_1,m_1\rangle \otimes |j_2,m_2\rangle\}$ dos autoestados de $\mathbf{j}_1^2$, $\mathbf{j}_2^2$, j_{1z}, j_{2z}.

Exercício 12: Considere o problema de adição dos momentos angulares $j_1 = 3$ e $j_2 = 1$:
a. Quais os possíveis valores de m e j, além das degenerescências $g_{j_1,j_2}(m)$?
b. Encontre os estados $\{|4,4\rangle, |4,3\rangle, |4,2\rangle, |3,3\rangle, |3,2\rangle, |2,2\rangle\}$ da base $\{|j,m\rangle\}$ expandidos através dos estados da base $\{|m_{j1}\rangle \otimes |m_{j2}\rangle\}$.

Exercício 13: Dado os momentos j_1 e j_2, e sendo $C_{m_{j1},m_{j2}}$ os coeficientes de Clebsch-Gordan, prove que $\sum_{m_{j1},m_{j2}} |C_{m_{j1},m_{j2}}|^2 = 1$.